Abschlussklausur
Theoretische Informatik 2
2. August 2022

Prof. Dr. Roland Meyer
René Maseli
TU Braunschweig
Sommersemester 2022

1. **Bitte am Anfang ausfüllen:**

   Vorname:

   Nachname:

   Matrikelnummer:

   Nummer des Sitzplatzes:

   Unterschrift:

2. Die Nummer Ihrer Klausur ist **#1** . Bitte merken Sie sich die Nummer. Wir werden Ihr Klausurergebnis anonymisiert unter Verwendung dieser Nummer bekanntgeben.
3. Achten Sie darauf, dass Ihre Klausur **vollständig ist** und **getackert bleibt** (8 Blätter).
4. Benutzen Sie **nur das an dieses Blatt angeheftete Papier**. Bei Bedarf können wir weitere Leerblätter austeilen. Wenn der Platz auf der Vorderseite des jeweiligen Aufgabenblatts nicht ausreicht, **machen Sie kenntlich**, wo Sie die Bearbeitung der Aufgabe fortsetzen.
5. Als Hilfsmittel sind **ausschließlich** Sprachwörterbücher sowie ein beidseitig **handschriftlich beschriebenes DIN A4-Blatt** erlaubt. Elektronische Geräte müssen während der Klausur ausgeschaltet bleiben. Täuschungsversuche werden als nicht bestanden gewertet und dem Prüfungsamt gemeldet.
6. Schreiben Sie leserlich und bearbeiten Sie Ihre Klausur mit einem **dokumentenechten Stift** (nicht mit Bleistift, kein Tipp-Ex, kein Tintenkiller) und **nicht in roter oder grüner Farbe**.
7. Wir werden die **Klausurergebnisse** auf unserer Website bekanntgeben: `tcs.cs.tu-bs.de/teaching/TheoInf2_SS_2022.html` .
8. Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten** (+ ggf. Zeit zum Lüften).
9. Mit **28 Punkten** ist die Klausur **sicher bestanden.**

Bepunktung: (wird von den Korrektoren ausgefüllt)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Max.	10	10	10	10	10	10	10	**70**
Punkte								

1. TM-Konstruktion

7 + 1 + 2 = 10 Punkte

Betrachten Sie die folgende Sprache

$$L = \left\{ w \in \{a, b\}^* \;\middle|\; \exists k \in \mathbb{N} \colon |w|_a = k|w|_b \right\} .$$

Hierbei bezeichnen $|w|_a$ die Anzahl der as und $|w|_b$ die Anzahl der bs in w.

a) Konstruieren Sie eine deterministische Turingmaschine M, die L akzeptiert. Beschreiben Sie die Funktionsweise Ihrer Turingmaschine.

b) Geben Sie eine möglichst genaue Platzschranke f für Ihre Turingmaschine M an, sodass $\mathrm{Space}_M(n) \in \mathcal{O}(f(n))$ gilt.

c) Finden Sie eine möglichst genaue Platzschranke g mit $L \in \mathrm{DSPACE}(\mathcal{O}(g(n)))$. Vergleichen Sie g mit der Platzschranke f Ihrer Turingmaschine M.

2. NP-Vollständigkeit

$\boxed{4 + 6 = 10 \text{ Punkte}}$

Betrachten Sie das folgende Problem.

Almost Satisfiability (A-SAT)	
Gegeben:	Formel F in CNF über boolschen Variablen X.
Entscheide:	Gibt es eine Belegung, welche jede Klausel in F bis auf eine erfüllt?

Zeigen Sie, dass A-SAT NP-vollständig (bzgl. logspace-many-one-Reduktionen) ist:

a) „Membership“: A-SAT $\in$ NP.

b) „Hardness“: A-SAT ist NP-schwer (bzgl. logspace-many-one-Reduktionen).

3. Entscheidbarkeit

$\boxed{5 + 5 = 10 \text{ Punkte}}$

Betrachten Sie das folgende Problem.

Inclusion in a regular language (IREG)

Gegeben: Eine determinische Turingmaschine M und ein deterministischer endlicher Automat A, jeweils über Eingabealphabet $\{0, 1\}$.

Entscheide: $\mathcal{L}(M) \subseteq \mathcal{L}(A)$?

a) Zeigen Sie, dass IREG co-semi-entscheidbar ist.

b) Zeigen Sie, dass IREG unentscheidbar ist. Verwenden Sie **nicht** den Satz von Rice.

4. NL-Vollständigkeit

$\boxed{5 + 5 = 10 \text{ Punkte}}$

Sei C eine endliche Menge von Farben. Ein C-kantengefärbter Graph weist jeder Kante genau eine der verfügbaren Farben zu. Die Menge der mit $c \in C$ gefärbten Kanten wird als E_c bezeichnet.

Betrachten Sie das folgende Problem.

Rot-Blau-Pfadproblem (RB-PATH)	
Gegeben:	Ein $\{\mathrm{r}, \mathrm{b}\}$-kantengefärbter Graph $G = \langle V, E_{\mathrm{r}}, E_{\mathrm{b}} \rangle$ und Knoten $s, t \in V$.
Entscheide:	Gibt es in G einen s-t-Pfad (darf Knoten mehrfach enthalten), welcher abwechselnd rote und blaue Kanten benutzt?

Zeigen Sie, dass RB-PATH NL-vollständig (bzgl. logspace-many-one-Reduktionen) ist:

a) „Membership“: RB-PATH $\in$ NL.

b) „Hardness“: RB-PATH ist NL-schwer (bzgl. logspace-many-one-Reduktionen).

5. Berechenbarkeit

10 Punkte

Sei $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Q_F \rangle$ eine deterministische Turingmaschine. Für einen Kontrollzustand $q \in Q$ und ein Wort $x \in \Sigma^*$ bezeichnen wir mit $|x|_q^M \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die Anzahl der Besuche von q entlang der Berechnung von M auf Eingabe x.

Zeigen Sie, dass die folgende totale Funktion activity unberechenbar ist.

$$\begin{aligned} &\text{activity} : \Sigma^* \times \Sigma^* \to (\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \\ &\text{activity}(w, x) = \max\left\{ |x|_q^{M_w} \;\middle|\; q \in Q_w \right\} \end{aligned}$$

6. Quiz

$\boxed{2 + 2 + 3 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Beantworten Sie die folgenden Fragen. Begründen Sie Ihre Antwort mit einem kurzen Beweis oder einem Gegenbeispiel.

a) Ist NL über dem Alphabet $\{0, 1\}^*$ abzählbar unendlich groß?

b) Seien f und g Funktionen. Falls f unberechenbar ist, ist dann $f \circ g$ mit $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ auch unberechenbar?

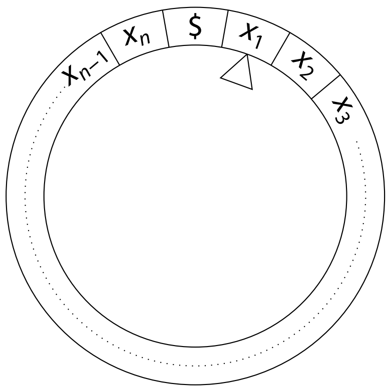
c) Sei $L = \{\langle M \rangle \mid M$ erreicht auf ε jeden Zustand außer $q_{\text{rej}}\}$. Ermöglicht der Satz von Rice die Aussage, dass die Sprache L unentscheidbar ist?

d) Sei M eine Turingmaschine. Ist $Time_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ genau dann logspace-berechenbar, wenn M ein logspace-Entscheider ist?

7. Zirkuläre Maschinen

5 + 5 = 10 Punkte

Eine zirkuläre Maschine (ZM) ist eine Turingmaschine mit folgender Besonderheit: Anstelle eines beidseitig unendlich langen Bandes hat sie ein zirkuläres Band. Eine spezielle Zelle mit dem \$-Symbol steht **gleichzeitig** sowohl links als auch rechts vom Eingabewort x (siehe Illustration). Man erreicht also mit $|x|$ Schritten nach Rechts dasselbe Feld, wie mit einem Schritt nach Links. Dabei darf \$ in keiner Transition überschrieben werden. Initial steht der Lesekopf auf dem ersten Symbol von Eingabe x.



Zeigen Sie, dass die durch zirkuläre Maschinen akzeptierten Sprachen **genau** die kontextsensitiven Sprachen sind:

a) Zeigen Sie, dass die Sprache jeder ZM kontextsensitiv ist.

b) Zeigen Sie, dass jede kontextsensitive Sprache durch eine ZM akzeptiert wird.