René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

Theoretische Informatik 1
Große Übung 5

TU Braunschweig
Wintersemester 2022/23

1 Nerode-Rechtskongruenz-Klassen

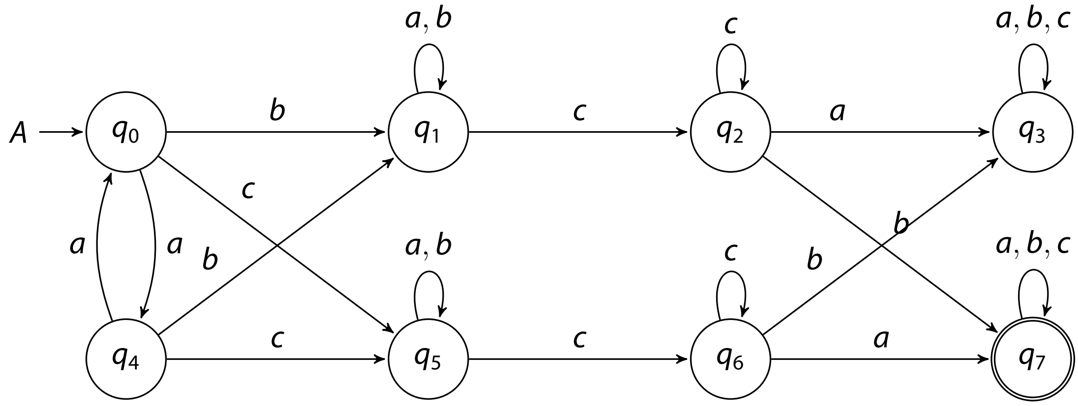
Betrachte die Sprache $L = \{w.w \mid w \in \{a,b\}^*\}$. Um zu zeigen, dass L nicht regulär ist, genügt es eine unendliche Teilmenge der Äquivalenzklassen zu finden, z.B. $\forall n \neq m \in \mathbb{N}$: $a^n b^n \not\equiv_L a^m b^m$. Stattdessen ist sogar zu zeigen, dass $[w]_{\equiv_L} = \{w\}$ gilt.

Beweis:
$\supseteq$ ist klar, $\subseteq$ kann durch Widerspruch gezeigt werden. Sei $v \in \{a,b\}^*$ mit $v \neq w$ und $v \equiv_L w$. Falls $|v| = |w|$, dann ist $w.w \in L$, aber $v.w \notin L$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei nun $|v| < |w|$. Falls $|w| - |v|$ ungerade ist, dann ist wieder $v.w \notin L$. Anderenfalls können wir $w = x.y$ zerlegen, sodass $|v| + |x| = |y|$ gilt.

Nehme jetzt ein beliebiges $z \in \{a,b\}^*$ mit $|z| = |x|$ aber $z \neq x$. Aus $0 < |x|$ folgt nämlich dessen Existenz. Betrachte $w.z.w.z \in L$. Es gilt $v.z.w.z = (v.z.x).(y.z) \notin L$, selbst wenn $v.z = y$ passen würde. Damit kann v nicht existieren. □

2 Table-Filling-Algorithmus

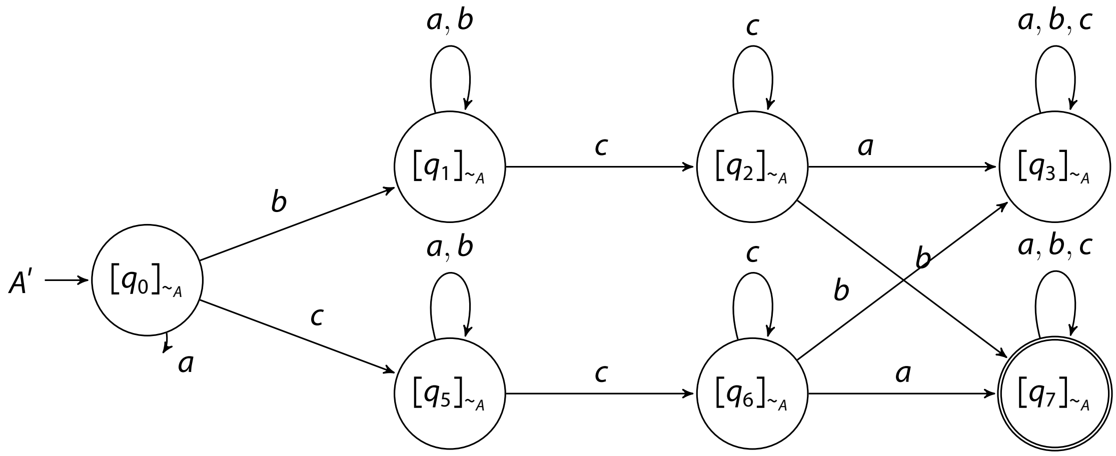
Gegeben ist der folgende DFA.



Die folgende Tabelle betrachtet ungeordnete Paare aus Zuständen von A. Die Nummern stehen für die Iteration des Algorithmus, in welcher das entsprechende Paar von Zuständen als ungleich festgestellt wurden.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
q_0		3	1	2		2	1	0
q_1			1	2	2	2	1	0
q_2				1	1	1	1	0
q_3					3	2	1	0
q_4						2	1	0
q_5							1	0
q_6								0
q_7								

Bei der vierten Iteration konnten keine neuen Paare unterschieden werden. Die leeren Zellen verraten nun, welche Zustände verschmolzen werden müssen, um einen minimalen DFA für $\mathcal{L}(A)$ zu erzeugen:



Es sollen alle Äquivalenzklassen der Nerode-Rechtskongruenz von $\mathcal{L}(A)$ aufgelistet werden. Jede dieser Klassen ist eine Sprache über dem Alphabet $\{a, b, c\}$ und ist einem der Zustände des minimalen DFA zugewiesen, nämlich den einzigartigen Zustand q mit $q_0 \xrightarrow{w} q$ für jedes Wort w aus der Äquivalenzklasse. Die Klassen indentifizieren sich am Besten mit einem Repräsentanten, z.B. einem kürzesten Wort, das den Zustand ansteuert.

$$\begin{aligned}
[\varepsilon]_{\equiv_{\mathcal{L}(A)}} &= a^* \\
[b]_{\equiv_{\mathcal{L}(A)}} &= a^* b\{a, b\}^* \\
[c]_{\equiv_{\mathcal{L}(A)}} &= a^* c\{a, b\}^* \\
[bc]_{\equiv_{\mathcal{L}(A)}} &= a^* b\{a, b\}^* c^+ \\
[cc]_{\equiv_{\mathcal{L}(A)}} &= a^* c\{a, b\}^* c^+ \\
[bcb]_{\equiv_{\mathcal{L}(A)}} &= a^* \big(b\{a, b\}^* c^+ b \cup c\{a, b\}^* c^+ a\big)\{a, b, c\}^* \\
[bca]_{\equiv_{\mathcal{L}(A)}} &= a^* \big(b\{a, b\}^* c^+ a \cup c\{a, b\}^* c^+ b\big)\{a, b, c\}^*
\end{aligned}$$

3 Pumping-Lemma

$$L_0 := \left\{w \in \{a, b\}^* \;\middle|\; |w|_a \geq |w|_b\right\}$$

Es ist zu zeigen, dass L_0 nicht regulär ist.

Beweis:
Sei $0 < p \in \mathbb{N}$.
Wähle das Wort $a^p b^p \in L_0$.
Seien $x, y, z \in \{a, b\}^*$ die Komponenten einer Zerlegung $w = x.y.z$ mit $|xy| \leq p$ und $y \neq \varepsilon$.
So wie das Wort gewählt wurde, gilt immer $y \in a^+$. Nun betrachte $x.y^0.z = a^{p-|y|}b^p \notin L_0$.
Da dies für alle p gilt, ist L_0 nach dem Pumping-Lemma nicht regulär. □

$$L_1 := \left\{w \in \{a, b\}^* \;\middle|\; |w|_a \leq |w|_b \text{ oder } |w|_b \leq\right\}$$

Es ist zu zeigen, dass L_1 nicht regulär ist.

Beweis:
Sei $0 < p \in \mathbb{N}$.
Wähle das Wort $a^{2(p+1)}b^{p+1} \in L_1$.
Sei $w = x.y.z$ eine Zerlegung mit $|xy| \leq p$ und $y \neq \varepsilon$.
So wie das Wort gewählt wurde, gilt immer $y \in a^+$ und $|y| \leq p$. Nun betrachte $x.y^0.z = a^{2p+2-|y|}b^{p+1} \notin L_1$.
Da dies für alle p gilt, ist L_0 nach dem Pumping-Lemma nicht regulär. □

$$L_2 := \left\{a^n b^m \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \text{ und } \left(n \neq 1 \text{ oder } \exists \ell \in \mathbb{N}\colon m = \ell^2\right)\right\}$$

Es kann mit dem Pumping-Lemma nicht (sofort) gezeigt werden, dass L_2 nicht regulär ist:
Wähle $p = 3$.
Sei $w = a^n b^m$ mit $n + m \geq p$ und $n = 1$ oder $m = \ell^2$.
Falls $n = 0$ oder $n = 2$, wähle eine Zerlegung mit $y = b$. Anderenfalls ist $n = 1$ oder $n \geq 3$. Wähle eine Zerlegung mit $y = a$.
Weder $i = 0$ noch $i \geq 2$ können $xy^iz \in L_2$ verhindern.
Nach dem Pumping-Lemma kann so keine Aussage über L_2 getroffen werden.