Große Übung 1 - Theoretische Informatik 1

Jede kleinste obere Schranke ist eindeutig.

Analog: Jede größte untere Schranke ist eindeutig.

- Es sei $\langle D,\leq\rangle$ ein Verband.
- Sei $A \subseteq D$ eine Teilmenge, sodass $\bigsqcup A$ existiert.
- Sei $x \in D$ eine kleinste obere Schranke von A.
- Weil $\bigsqcup A$ eine obere Schranke von A ist, gilt $x \leq \bigsqcup A$.
- Weil x eine obere Schranke von A ist, gilt $\bigsqcup A \leq x$.
- $\leq$ ist antisymmetrisch, daher $x = \bigsqcup A$.

Wenn $\bigsqcup D$ existiert, dann ist $\bigsqcap\varnothing = \bigsqcup D$.

Analog: Wenn $\bigsqcap D$ existiert, dann ist $\bigsqcup\varnothing = \bigsqcap D$.

- Es sei $\langle D,\leq\rangle$ ein Verband mit $\top := \bigsqcup D \in D$.
- $\top$ erfüllt unter Anderem $\forall a \in D: a \leq \top$.
- Für $\bigsqcap\varnothing$ soll gelten: $(\forall a \in \varnothing: \bigsqcap\varnothing \leq a) \land (\forall d \in D: (\forall a \in \varnothing: d \leq a) \rightarrow d \leq \bigsqcap\varnothing)$.
- (Nachtrag:) $\forall a:(a \notin \varnothing \lor \bigsqcap\varnothing \leq a) \land \forall d:(d \notin D \lor \neg\forall a:(a \notin \varnothing \lor d \leq a) \lor d \leq \bigsqcap\varnothing)$.
- Effektiv soll gelten: $\forall d \in D: d \leq \bigsqcap\varnothing$, denn alle Elemente sind untere Schranken von $\varnothing$.
- Weil $\top$ diese Anforderung erfüllt, ist $\top$ eine größte untere Schranke von $\varnothing$.
- Durch Eindeutigkeit folgt $\bigsqcap\varnothing = \top$.

Wenn $\bigsqcup A$ existiert, dann existiert auch $\bigsqcup(A \cup \{b\})$.

Analog: Wenn $\bigsqcap A$ existiert, dann existiert auch $\bigsqcap(A \cup \{b\})$.

- Es sei $\langle D,\leq\rangle$ ein Verband, $b \in D$ und $A \subseteq D$ mit $\bigsqcup A \in D$.
- $\bigsqcup A \sqcup b$ ist eine obere Schranke von $A \cup \{b\}$:
    - $\leq$ ist transitiv, daher $\forall a \in A: a \leq \bigsqcup A \leq \bigsqcup A \sqcup b$,
    - außerdem $b \leq \bigsqcup A \sqcup b$.
- Sei x eine obere Schranke von $A \cup \{b\}$.
    - x ist auch eine obere Schranke von A, daher $\bigsqcup A \leq x$.
    - Zusammen mit $b \leq x$ schließen wir $\bigsqcup A \sqcup b \leq x$.
- Also ist $\bigsqcup A \sqcup b$ eine kleinste obere Schranke von $A \cup \{b\}$.
- Durch Eindeutigkeit folgt $\bigsqcup A \sqcup b = \bigsqcup(A \cup \{b\})$.

Wenn A nicht leer, aber endlich ist, existiert $\bigsqcup A$.

Analog existiert $\bigsqcap A$.

- Es sei $\langle D,\leq\rangle$ ein Verband.
- Induktionsanfang:
    - $\bigsqcup\{a\} = a$ (unter anderem weil $\leq$ reflexiv ist).
- Induktionsschluss:
    - Sei $\varnothing \neq B \subseteq D$ endlich mit $\bigsqcup B \in D$ und sei $c \in D$.
    - Dann ist $\bigsqcup(B \cup \{c\}) \in D$, wie oben gezeigt.

- Mit Induktion folgt die Aussage für jedes nicht-leere und endliche $A \subseteq D$.

Jeder nichtleere endliche Verband ist vollständig.

- Sei $\langle D,\leq\rangle$ ein Verband, D endlich und $A \subseteq D$.
- A ist endlich.
- Falls A nicht leer ist, folgt $\coprod A \in D$ und $\prod A \in D$ wie oben gezeigt.
- Das schließt D ein.
- Falls A leer ist, gilt $\coprod\varnothing = \prod D$ und $\prod\varnothing = \coprod D$ wie oben gezeigt.
- Folglich existieren $\coprod A$ und $\prod A$ für alle $A \subseteq D$.

$\langle\mathcal{P}(M),\subseteq\rangle$ ist ein vollständiger Verband.

- $\subseteq$ ist eine partielle Ordnung:
  - reflexiv: $X \subseteq X$, denn $\forall x \in X: x \in X$.
  - antisymmetrisch $X \subseteq Y \land Y \subseteq X \rightarrow X = Y$, durch Extensionalitäts-Axiom.
  - transitiv $X \subseteq Y \land Y \subseteq Z \rightarrow X \subseteq Z$, denn mit $X \subseteq Y \subseteq Z$ folgt $\forall x \in X: x \in Y \land x \in Z$.
- Jedes $A \subseteq \mathcal{P}(M)$ hat $\coprod A \in \mathcal{P}(M)$:
  - $\bigcup A$ ist eine obere Schranke von A:
    - Sei $B \in A$, $B \subseteq B \cup \bigcup(A \setminus \{B\}) = \bigcup A$.
  - Sei C eine obere Schranke von A. $\bigcup A \subseteq C$:
    - Sei $x \in \bigcup A$, dann gibt es $B \in A$ mit $x \in B$.
    - $B \subseteq C$, also $x \in C$.
  - Also $\coprod A = \bigcup A$.
- Jedes $A \subseteq \mathcal{P}(M)$ hat $\prod A \in \mathcal{P}(M)$:
  - $\bigcap A$ ist eine untere Schranke von A:
    - Sei $B \in A$, $\bigcap A = \bigcap(A \setminus \{B\}) \cap B \subseteq B$.
  - Sei C eine untere Schranke von A. $C \subseteq \bigcap A$:
    - Sei $x \in C$, dann gilt $x \in B$ für alle $B \in A$, weil $C \subseteq B$, also $x \in \bigcap A$.
  - Also $\prod A = \bigcap A$.
- Damit ist $\langle\mathcal{P}(M),\subseteq\rangle$ vollständig.