

Theoretische Informatik 2 Übungsblatt 6

Thomas Haas
Prof. Dr. Roland Meyer

TU Braunschweig
Sommersemester 2020

Ausgabe: 14.07.2020

Abgabe: 24.07.2020, 17:00

Geben Sie Ihre Lösungen bis Freitag, 24.07.2020 17:00 Uhr, per E-Mail an ihren Tutor ab.
Fertigen Sie dazu ihre Hausaufgaben direkt in .pdf Form an oder scannen ihre handschriftlichen Hausaufgaben ein. Geben Sie in Gruppen von **4 Personen** ab.

Aufgabe 1: Abschlusseigenschaften von P [6 Punkte]

- a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass P abgeschlossen ist unter Vereinigung, Komplement und Konkatenation. Falls $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in P$, dann auch $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \in P$, $\overline{\mathcal{L}_1} \in P$ und $\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 \in P$.
- b) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass P abgeschlossen ist unter Kleene Stern. Falls $\mathcal{L}_1 \in P$, dann auch $\mathcal{L}_1^* \in P$.

Aufgabe 2: Erfüllende Belegungen berechnen [6 Punkte]

Zeigen Sie: Wenn wir SAT in P lösen könnten, dann könnten wir auch für jede Formel F in CNF eine erfüllende Belegung in P berechnen. Geben Sie dazu einen Algorithmus in Pseudo-Code an.

Bemerkung: Eine erfüllende Belegung zu berechnen ist stärker als nur die Existenz solch einer Belegung zu finden.

Aufgabe 3: Entailment [8 Punkte]

Wir betrachten das folgende Problem für aussagenlogische Formeln.

Implikationstest (ENTAILMENT)

Gegeben: Aussagenlogische Formeln F, F' in CNF

Entscheide: Impliziert die Formel F die Formel F' ?

Beweisen Sie: ENTAILMENT ist coNP-vollständig (bezüglich Polynomialzeit-Reduktionen).

Beweisen Sie zunächst, dass VALIDITY coNP-hart ist, und reduzieren Sie dann VALIDITY in Polynomialzeit auf ENTAILMENT.

Allgemeingültigkeit (VALIDITY)

Gegeben: Aussagenlogische Formel F in CNF

Entscheide: Ist F allgemeingültig, also eine Tautologie?

Hinweis: Mit Hilfe der Tseitin-Transformation lässt sich in Polynomialzeit zu einer beliebigen aussagenlogischen Formel eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in CNF berechnen.

Aufgabe 4: Sudoku [10 Punkte]

Betrachten Sie das folgende Problem.

SUDOKU

Gegeben: Eine $n^2 \times n^2$ Sudoku-Matrix M mit Einträgen in $\{1, \dots, n^2, ?\}$

Entscheide: Gibt es eine Möglichkeit die ?-Einträge so zu ersetzen, dass ein korrekt ausgefülltes Sudoku herauskommt?

Eine $n^2 \times n^2$ Sudoku-Matrix M ist in n^2 viele $(n \times n)$ -Blöcke unterteilt. M ist korrekt ausgefüllt, wenn in jedem Block, in jeder Zeile und in jeder Spalte alle Zahlen von 1 bis n^2 genau einmal vorkommen.

Es ist leicht zu sehen, dass SUDOKU in NP liegt, denn wir können die fehlenden Einträge raten und effizient überprüfen. Das heißt, dass es eine Reduktion von SUDOKU auf SAT geben muss.

Finden Sie nun eine Reduktion von SUDOKU auf SAT .

Bemerkung: Man kann sogar zeigen, dass SUDOKU NP-vollständig ist.